

# Esempi di compiti scritti

## Istituzioni di Matematiche 2

(Proff. Luigi Serena e Paolo Gronchi)

### Compito 1

1. Data la funzione  $f(x, y) = 3x^2 + 4xy + 8y$  nel cerchio di raggio 2 con centro nel punto  $(-2, 3)$ 
  - determinare il tipo di quadrica di cui il grafico di  $f$  è parte (oppure classificare le curve di livello di  $f$ ),
  - classificare gli eventuali punti critici di  $f$ ,
  - trovare i valori massimo e minimo di  $f$ .
2. Una lamina ha la forma di un settore circolare di raggio 1, angolo al centro di  $60^\circ$  ed una densità pari alla distanza dal vertice del settore. Determinare la posizione del baricentro di tale lamina.
3. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + 3y(x) = 3x^2 - 4x + 2, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

### Compito 2

1. Data la funzione  $f(x, y) = 2 + \sqrt{x^2 + 4xy + 3y^2 + 4}$ 
  - determinare il tipo di quadrica di cui il grafico di  $f$  è parte (oppure classificare le curve di livello di  $f$ ),
  - classificare gli eventuali punti critici di  $f$ ,
  - trovare i valori massimo e minimo di  $f$ .
2. Una lamina ha la forma di un semicerchio di raggio 1 ed una densità puntuale  $\rho(x, y) = d^3$ , dove  $d$  è la distanza del punto dal diametro del semicerchio. Determinare la massa di tale lamina.
3. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = 17 \sin(2x), \\ y(0) = -4, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

### Compito 3

1. Data la funzione  $f(x, y) = \frac{2+x^2+y^2}{4y}$  nel cerchio di raggio 2 con centro nel punto  $(0, 3)$ 
  - determinare il tipo di quadrica di cui il grafico di  $f$  è parte (oppure classificare le curve di livello di  $f$ ),
  - classificare gli eventuali punti critici di  $f$ ,
  - trovare i valori massimo e minimo di  $f$ .
2. Una lamina ha la forma di un triangolo rettangolo di lati 3, 4 e 5 ed una densità pari alla distanza dall'ipotenusa. Determinare il baricentro di tale lamina.
3. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 8 \sin(x), \\ y(0) = 1/2, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

### Compito 4

1. Data la funzione  $f(x, y) = \frac{x^2+2xy+3y^2+2}{2y-4}$  nel dominio  $D = \{-1 \leq y \leq x \leq 1\}$ 
  - determinare il tipo di quadrica di cui il grafico di  $f$  è parte (oppure classificare le curve di livello di  $f$ ),
  - classificare gli eventuali punti critici di  $f$ ,
  - trovare i valori massimo e minimo di  $f$ .
2. Calcolare la massa di una lamina che ha la forma di un triangolo equilatero e la densità  $\rho(x, y) = \ell - d(x, y)$ , dove  $\ell$  è il lato del triangolo e  $d$  è la distanza dal bordo del triangolo.
3. Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = \cos(2x) - 3.$$

### Compito 5

1. Data la funzione  $f(x, y) = y + \sqrt{4 - 4y - x^2}$  nel cerchio con centro nell'origine e raggio 1
  - determinare il tipo di quadrica di cui il grafico di  $f$  è parte (oppure classificare le curve di livello di  $f$ ),

- classificare gli eventuali punti critici di  $f$ ,
  - trovare i valori massimo e minimo di  $f$ .
- 2.** Una lamina ha la forma di un quadrato ed una densità  $\rho(x, y)$  pari alla distanza del punto  $(x, y)$  da una diagonale del quadrato. Determinare la massa di tale lamina ed il suo momento d'inerzia rispetto ad una retta passante per il centro del quadrato e parallela ad un lato.
- 3.** Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 4 \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x), \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

### Compito 6

- 1.** Data la funzione  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4xy + 5y^2 + 1}$  nel rettangolo  $\{(x, y) : |x| \leq 3, |y| \leq 1\}$
- determinare il tipo di quadrica di cui il grafico di  $f$  è parte (oppure classificare le curve di livello di  $f$ ),
  - classificare gli eventuali punti critici di  $f$ ,
  - trovare i valori massimo e minimo di  $f$ .
- 2.** Una lamina ha la forma di un triangolo isoscele con due angoli di  $30^\circ$  ed una densità  $\rho(x, y)$  pari alla distanza del punto  $(x, y)$  dal più lungo dei lati del tringolo. Determinare il baricentro di tale lamina.
- 3.** Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 10 \operatorname{sen}(x), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

### Compito 7

- 1.** Data la funzione  $f(x, y) = x^2 + 4xy + 3y^2$  nel cerchio con centro l'origine e raggio 2
- determinare il tipo di quadrica di cui il grafico di  $f$  è parte (oppure classificare le curve di livello di  $f$ ),
  - classificare gli eventuali punti critici di  $f$ ,

- trovare i valori massimo e minimo di  $f$ .
2. Una lamina ha la forma di un cerchio ed una densità  $\rho(x, y)$  pari alla distanza del punto  $(x, y)$  da una retta tangente alla circonferenza. Determinare il baricentro di tale lamina.
  3. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 32x e^x, \\ y(0) = -3, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

### Compito 8

1. Data la funzione  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2 + 6}{6y} - x - 1$  definita nel rettangolo  $\{0 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 2\}$ 
  - determinare il tipo di quadrica di cui il grafico di  $f$  è parte (oppure classificare le curve di livello di  $f$ ),
  - classificare gli eventuali punti critici di  $f$ ,
  - trovare i valori massimo e minimo di  $f$ .
2. Una lamina ha per forma una mezza corona circolare con raggi 2 e 3 e densità  $\rho(x, y)$  pari alla distanza del punto  $(x, y)$  dal centro della corona circolare. Determinare il baricentro di tale lamina.
3. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 8y(x) = 8x^2, \\ y(0) = 1/4, \\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

### Compito 9

1. Data la funzione  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2x - y$  definita nel cerchio di raggio 1 e centro in  $(-1, 0)$ 
  - determinare il tipo di quadrica di cui il grafico di  $f$  è parte (oppure classificare le curve di livello di  $f$ ),
  - classificare gli eventuali punti critici di  $f$ ,
  - trovare i valori massimo e minimo di  $f$ .

2. Una lamina a forma di L è ottenuta togliendo da un quadrato di lato 4 un quadrato di lato 3 e ha una densità  $\rho(x, y)$  pari al quadrato della distanza del punto  $(x, y)$  dal centro della quadrato grande. Determinare il baricentro di tale lamina.
3. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + 10y(x) = \cos(3x) + 6 \operatorname{sen}(3x), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

### Compito 10

1. Data la funzione  $f(x, y) = y - \sqrt{x^2 + 3y^2 - 6xy + 42}$  definita nel rettangolo  $-5 \leq x \leq 0$  e  $-2 \leq y \leq 2$ 
  - determinare il tipo di quadrica di cui il grafico di  $f$  è parte (oppure classificare le curve di livello di  $f$ ),
  - classificare gli eventuali punti critici di  $f$ ,
  - trovare i valori massimo e minimo di  $f$ .
2. Una lamina ha la forma di un triangolo rettangolo isoscele e ha una densità  $\rho(x, y)$  pari alla distanza del punto  $(x, y)$  dall'ipotenusa. Determinare il baricentro di tale lamina.
3. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 20 \cos(2x), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$